PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1909. Redaktionsschluß für No. 21 am 16. Oktober 1909. 10. Jahrgang.

INHALT.

Originalmitteilungen:

G. Nordström, Zur Elektrodynamik Minkowskis. S. 681.

H. Happel, Versuch einer Erweiterung des Gesetzes der korrespondierenden Zustände. S. 687.

J. Stock, Über asymmetrische Tripletts im Wolframspektrum. S. 694.

O. Hahn u. L. Meitner, Nachweis der komplexen Natur von Radium C. S. 697.

C. Richter, Dämpfung elektrischer Schwingungen beim Funkenübergang in verschiedenen Gasen. S. 703.

E. Wasmuth, Über eine merkwürdige Nordlichterscheinung. S. 707.

Vorträge und Reden:

G. E. Hale, Einige Gelegenheiten zu astronomischen Arbeiten mit wohlfeilen Apparaten. S. 707.

Besprechungen:

Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik. XXII. S. 719.

A. Saal, Die Photographie in den Tropen mit den Trockenplatten. S. 719.

A. v. Hübl, Die Theorie und Praxis der Farbenphotographie mit Autochromplatte. S. 720.

R. Fitzner, Die Regenverteilung in den deutschen Kolonien. S. 720.

J. B. Messerschmitt, Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. S. 720.

Handbuch der anorganischen Chemie. II, 1. S. 720.

W. Makower, Die radioaktiven Substanzen. S. 720.

C. W. Raffety, Einführung in die Wissenschaft der Radioaktivität. S. 721.

M. v. Rohr, Abhandlungen zur Geschichte des Stereoskops. S. 721.

G. Mercator, Die Diapositivverfahren. S. 721.

H. Poincaré, Die Maxwellsche Theorie und die Hertzschen Schwingungen. S. 721.

F. M. Feldhaus, Luftfahrt einst und jetzt. S. 721.

Tagesereignisse. S. 721.

Personalien. S. 722.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1909/10. S. 722.

Gesuche. S. 736.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Elektrodynamik Minkowskis.

Von Gunnar Nordström.

Die im elektromagnetischen Felde wirkende ponderomotorische Kraft leitet sich ja nach der Elektrodynamik von Lorentz, wenigstens für ruhende Körper, aus den fiktiven Maxwellschen Spannungen und der Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße ab [1]). Wie liegt die Sache, wenn man sich auf den Boden der Theorie von Minkowski stellt? Der Ausdruck, den Minkowski selbst für die ponderomotorische Kraft angibt [2]), leitet sich nur für ruhende Körper aus Spannungen und Bewegungsgröße ab. Die Annahme dieses Ausdruckes stößt aber auf gewisse Schwierigkeiten (vgl. unten S. 686). Neuerdings hat Abraham in einer Arbeit, wo er die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik vergleicht [3]), einen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft aufgestellt, dessen Gültigkeit in der Elektrodynamik von Minkowski er annimmt. Dabei wird diese Elektrodynamik von Abraham etwas modifiziert, unter der Behauptung, daß doch die Grundlage der Theorie von Minkowski — das Relativitätsprinzip — aufrecht gehalten wird. Nach dem erwähnten Ausdruck Abrahams würde sich die ponderomotorische Kraft auch für bewegte Körper aus Spannungen und elektromagnetischer Bewegungsgröße ergeben. Es scheint mir nicht möglich, diesen Ausdruck Abrahams mit den Prinzipien der Mechanik Minkowskis zu vereinigen. An Hand eines einfachen Beispieles werde ich nämlich zeigen, daß die Annahme, die ponderomotorische Kraft ließe sich auch für bewegte Körper vollständig durch die fiktiven Spannungen und die Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße darstellen, zu Widersprüchen mit der Mechanik von Minkowski führt. Auch dem Ausdruck, den Abraham für die Joulesche Wärme postuliert [1]), kann ich nicht beistimmen.

1) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wiss. V 14, S. 244 u. f.
2) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 97.
3) M. Abraham, Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXVIII, 1909: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Gl. (6) und (60).

Der Kern der Elektrodynamik und Mechanik von Minkowski liegt ja in dem Postulat, daß alle Vorgänge denselben, unveränderten Gesetzen folgen, wenn sie von verschiedenen Raum—Zeit-Bezugssystemen aus beurteilt werden. Zwischen den Koordinaten in zwei solchen Bezugssystemen gelten lineare Beziehungen. Die Zeit wird hierbei auch als eine Koordinate betrachtet (nach Minkowski ist ja $c\sqrt{-1}\cdot t$, wo c die Lichtgeschwindigkeit und t die Zeit, den Raumkoordinaten völlig gleichartig).

Es seien (x, y, z, t) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ zwei Raum—Zeit-Bezugssysteme. Denken wir uns die Verhältnisse im gewöhnlichen, dreidimensionalen Raum, so haben wir zwei räumliche Bezugssysteme, die sich im Verhältnis zueinander gleichförmig bewegen. Der Einfachheit halber legen wir die x-Achse so, daß der Koordinatenanfang des überstrichenen Systemes sich, vom unüberstrichenen System aus betrachtet, längs dieser Achse bewegt; die Geschwindigkeit dieser Bewegung sei v. Weiter legen wir die Achsen des überstrichenen Systemes den entsprechenden Achsen des unüberstrichenen parallel. (In der Minkowskischen, vierdimensionalen Welt sind die x- und $\bar{x}$-Achse, wie auch die t- und $\bar{t}$-Achse nicht miteinander parallel.) Dann sind

1) M. Abraham, l. c., Gl. (III).

die Beziehungen zwischen überstrichenen und unüberstrichenen Koordinaten folgende (sie sind zuerst von Einstein[1]) angegeben):

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \beta(x - vt), \\ \bar{y} &= y, \quad \bar{z} = z, \\ \bar{t} &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume ist, und weiter

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1a)$$

gesetzt ist. Umgekehrt hat man

$$x = \beta(\bar{x} + v\bar{t}), \quad t = \beta\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right). \quad (\bar{1})$$

Jede Funktion von x, y, z, t kann mit Hilfe dieser Beziehungen auch als eine Funktion von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ aufgefaßt werden. Es sei F eine solche Funktion. Es ist dann

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial t}dt \\ &\quad = \frac{\partial F}{\partial x}\beta(d\bar{x} + vd\bar{t}) + \frac{\partial F}{\partial y}d\bar{y} + \frac{\partial F}{\partial z}d\bar{z} + \\ &\qquad \frac{\partial F}{\partial t}\beta\left(d\bar{t} + \frac{v}{c^2}d\bar{x}\right) \\ &\quad = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}d\bar{y} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}d\bar{z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{t}}d\bar{t}. \end{aligned}$$

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} &= \beta\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial F}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{t}} &= \beta\left(\frac{\partial F}{\partial t} + v\frac{\partial F}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Diese Gleichungen finden bei Transformation der Feldgleichungen Anwendung.

In der Elektrodynamik von Minkowski lauten die Grundgleichungen[2]) (die, nebst den Nebenbedingungen (4), auch von Abraham unverändert beibehalten sind):

$$\left.\begin{aligned} c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} &= \mathfrak{J} + \mathfrak{v}\varrho, \\ \mathrm{div}\,\mathfrak{D} &= \varrho, \\ c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= 0, \\ \mathrm{div}\,\mathfrak{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Es sind hier $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ elektrische Kraft und elektrische Erregung, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ magnetische Kraft und magnetische Erregung, $\mathfrak{J}$ der Leitungsstrom, ϱ die Dichte der (wahren) Elektrizität, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Materie, t die Zeit und c die Lichtgeschwindigkeit (universelle Konstante).

Zu den Differentialgleichungen (3) treten noch die Nebenbedingungen, die für isotrope Körper lauten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] &= \varepsilon\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right), \\ \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}] &= \mu\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ε und μ sind Dielektrizitätskonstante und Permeabilität der Materie.

Wenn verschiedene Raum—Zeit-Bezugssysteme zugrunde gelegt werden, hat man, wie gesagt, immer dieselben Feldgleichungen (3) und (4). Wie zwischen den Koordinaten hat man auch zwischen den Feldgrößen in verschiedenen Bezugssystemen gewisse Beziehungen. Wenn die Achsen zweier Bezugssysteme (x, y, z, t) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ so gelegt sind, daß zwischen überstrichenen und unüberstrichenen Koordinaten die Gleichungen (1) gelten, so hat man zwischen überstrichenen und unüberstrichenen Feldgrößen die Beziehungen[1])

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{E}}_x &= \mathfrak{E}_x, \quad \bar{\mathfrak{E}}_y = \beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right), \\ \bar{\mathfrak{E}}_z &= \beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right), \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{D}}_x &= \mathfrak{D}_x, \quad \bar{\mathfrak{D}}_y = \beta\left(\mathfrak{D}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_z\right), \\ \bar{\mathfrak{D}}_z &= \beta\left(\mathfrak{D}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y\right), \end{aligned}\right\} \quad (5b)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{H}}_x &= \mathfrak{H}_x, \quad \bar{\mathfrak{H}}_y = \beta\left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{D}_z\right), \\ \bar{\mathfrak{H}}_z &= \beta\left(\mathfrak{H}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{D}_y\right), \end{aligned}\right\} \quad (5c)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}}_x &= \mathfrak{B}_x, \quad \bar{\mathfrak{B}}_y = \beta\left(\mathfrak{B}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z\right), \\ \bar{\mathfrak{B}}_z &= \beta\left(\mathfrak{B}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y\right), \end{aligned}\right\} \quad (5d)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{J}}_x &= \frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{J}_x}{1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}, \quad \bar{\mathfrak{J}}_y = \mathfrak{J}_y + \frac{v}{c^2}\mathfrak{J}_x\frac{\mathfrak{v}_y}{1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}, \\ \bar{\mathfrak{J}}_z &= \mathfrak{J}_z + \frac{v}{c^2}\mathfrak{J}_x\frac{\mathfrak{v}_z}{1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (5e)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{v}}_x &= \frac{\mathfrak{v}_x - v}{1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}, \quad \bar{\mathfrak{v}}_y = \frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{v}_y}{1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}, \\ \bar{\mathfrak{v}}_z &= \frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{v}_z}{1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (5f)$$

$$\bar{\varrho} = \beta\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}\right)\varrho - \beta\frac{v}{c^2}\mathfrak{J}_x. \quad (5g)$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 902, 1905.
2) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 74.

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 74; A. Einstein u. J. Laub, Ann. d. Phys. 26, 534, 1908.

Umgekehrt hat man

$$\mathfrak{E}_y = \beta\left(\overline{\mathfrak{E}_y} + \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{B}_z}\right), \quad \mathfrak{E}_z = \beta\left(\overline{\mathfrak{E}_z} - \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{B}_y}\right) \quad (5a)$$

usw.

Im überstrichenen System schreiben wir z. B. die erste der Gleichungen (3)

$$c\,\overline{\operatorname{curl}\mathfrak{H}} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{D}}}{\partial\bar{t}} = \overline{\mathfrak{J}} + \overline{v}\overline{\varrho}.$$

Es ist natürlich hier $\overline{\operatorname{curl}\mathfrak{H}}$ ein Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_z}}{\partial\bar{y}} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_y}}{\partial\bar{z}}, \quad \frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_x}}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_z}}{\partial\bar{x}}, \quad \frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_y}}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_x}}{\partial\bar{y}},$$

wenn, wie wir annehmen, das Bezugssystem ein Rechtssystem ist.

Es soll nun ein einfacher spezieller Fall betrachtet werden, der zeigt, daß für bewegte Körper die ponderomotorische Kraft sich nicht vollständig aus den fiktiven Spannungen und der Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße ableitet; und welches Beispiel auch wichtige Schlüsse über die Joulesche Wärme ziehen läßt.

Es sei von einem Bezugssystem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ aus beurteilt alle Materie in Ruhe und alle Größen nur von einer Koordinate $\bar{x}$ (nicht aber von $\bar{y}$, $\bar{z}$ und $\bar{t}$) abhängig. Der Raum zwischen $\bar{x} = -a$ und $\bar{x} = +a$ sei von einem homogenen, leitenden Medium erfüllt, sonst sei keine Materie vorhanden. Die elektrische Kraft $\overline{\mathfrak{E}}$ sei überall auch räumlich konstant und der $\bar{z}$-Achse parallel. Die magnetische Kraft $\overline{\mathfrak{H}}$ sei der $\bar{y}$-Achse parallel, und für $\bar{x} < -a$ sei $\overline{\mathfrak{H}_y}$ konstant gleich $\overline{\mathfrak{H}_{y1}}$; für $\bar{x} > +a$ habe $\overline{\mathfrak{H}_y}$ dagegen den entgegengesetzten Wert

$$\overline{\mathfrak{H}_{y2}} = -\overline{\mathfrak{H}_{y1}}.$$

Zwischen $\bar{x} = -a$ und $\bar{x} = +a$ sei $\frac{\partial\overline{\mathfrak{H}_y}}{\partial\bar{x}}$ konstant. Es fließt dann in der leitenden Scheibe ein der z-Achse paralleler elektrischer Strom von der Dichte

$$\overline{\mathfrak{J}_z} = \frac{c}{a}\overline{\mathfrak{H}_{y2}}. \quad (6)$$

Beiläufig sei bemerkt, daß die spezifische Leitfähigkeit der Scheibe den Wert

$$\frac{c}{a}\cdot\frac{\overline{\mathfrak{H}_{y2}}}{\overline{\mathfrak{E}_z}}$$

haben muß.

Die auf die Scheibe wirkenden ponderomotorischen Kräfte geben als Resultierende Null, wie sich sofort zeigen wird. Für ruhende Körper ist nicht zu bezweifeln, daß die ponderomotorische Kraft sich vollständig aus den fiktiven Spannungen und der elektromagnetischen Bewegungsgröße berechnen läßt. Die fiktiven Spannungen im Äther sind ja bekannt[1]), sie sind zu beiden Seiten der Scheibe dieselben und üben auf ihre Seiten einen Normaldruck von der Größe

$$\frac{1}{2}(\overline{\mathfrak{E}_z^2} + \overline{\mathfrak{H}_{y1}^2}) = \frac{1}{2}(\overline{\mathfrak{E}_z^2} + \overline{\mathfrak{H}_{y2}^2})$$

pro Flächeneinheit aus. Da weiter die elektromagnetische Bewegungsgröße zeitlich konstant ist, so ist in der Tat die auf die Scheibe wirkende ponderomotorische Kraft gleich Null. Dasselbe Ergebnis geben die Ausdrücke von Minkowski und Abraham. Wenn keine fremden Kräfte auf die Scheibe wirken, hat sie also kein Bestreben, sich in Bewegung zu setzen, denn auch nach der Mechanik von Minkowski verschwindet die Beschleunigung, wenn die Kraft verschwindet.

Nun soll der Vorgang von einem zweiten Bezugssystem (x, y, z, t) aus betrachtet werden, das durch die Gleichungen (1) mit dem System $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ verknüpft ist. Vom System (x, y, z, t) aus betrachtet, bewegt sich die Scheibe mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x-Achse.

Wir suchen auch nun die ponderomotorische Kraft aus den fiktiven Spannungen und der elektromagnetischen Bewegungsgröße zu bestimmen. Zunächst haben wir, da im leeren Raum $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, für die elektrische und magnetische Kraft.

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_{z1} = \beta\left(\overline{\mathfrak{E}_z} - \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{H}_{y1}}\right) = \beta\left(\overline{\mathfrak{E}_z} + \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{H}_{y2}}\right), \\
&\qquad\qquad \mathfrak{E}_{x1} = \mathfrak{E}_{y1} = 0, \\
&\mathfrak{E}_{z2} = \beta\left(\overline{\mathfrak{E}_z} - \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{H}_{y2}}\right), \quad \mathfrak{E}_{x2} = \mathfrak{E}_{y2} = 0, \\
&\mathfrak{H}_{y1} = \beta\left(\overline{\mathfrak{H}_{y1}} - \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z}\right) = \beta\left(-\overline{\mathfrak{H}_{y2}} - \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z}\right), \\
&\qquad\qquad \mathfrak{H}_{x1} = \mathfrak{H}_{z1} = 0, \\
&\mathfrak{H}_{y2} = \beta\left(\overline{\mathfrak{H}_{y2}} - \frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z}\right), \quad \mathfrak{H}_{x2} = \mathfrak{H}_{z2} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Beim Berechnen derjenigen ponderomotorischen Kraft, die den fiktiven Spannungen entspricht, denke man sich ein im Bezugssysteme (x, y, z, t) feststehendes Parallelepipedon, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind. Die der yz-Ebene parallelen Seitenflächen, deren Flächeninhalt der Flächeneinheit gleich sei, sollen zur betrachteten Zeit auf verschiedenen Seiten von der Scheibe liegen. Man braucht ja nur diejenigen Flächenkräfte zu berücksichtigen; die der Außenraum auf die letztgenannten Seitenflächen ausübt. Auf die der negativen x-Richtung zugekehrten Fläche üben die fiktiven Spannungen einen senkrechten Druck von der Größe

1) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wiss. V 14, S. 161.

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{z1}^2+\mathfrak{H}_{y1}^2)=\frac{1}{2}\beta^2\left\{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathfrak{E}_z^2+\mathfrak{H}_{y2}^2)+4\frac{v}{c}\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}\right\}$$

aus. Auf die der positiven x-Richtung zugekehrten Seitenfläche wirkt in entgegengesetzter Richtung der Druck

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{z2}^2+\mathfrak{H}_{y2}^2)=\frac{1}{2}\beta^2\left\{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)(\overline{\mathfrak{E}_z^2}+\overline{\mathfrak{H}_{y2}^2})-4\frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}\right\}.$$

Die Resultierende dieser beiden Kräfte hat die x-Richtung und eine Größe

$$4\beta^2\frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}.$$

Das ist die ponderomotorische Kraft, die gemäß den fiktiven Spannungen auf die Materie innerhalb des Parallelepipedons ausgeübt wird. Hierzu tritt noch eine Kraft, die gleich ist der zeitlichen Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße innerhalb des Parallelepipedons. Für die Dichte $\mathfrak{g}$ der elektromagnetischen Bewegungsgröße (die Impulsdichte) gilt bekanntlich im leeren Raum der Ausdruck

$$\mathfrak{g}=\frac{1}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

In unserem Falle ist sie der x-Achse parallel. Auf der Seite der Scheibe, die durch den Index 1 gekennzeichnet ist, hat man

$$\mathfrak{g}_{x1}=-\frac{1}{c}\mathfrak{E}_{z1}\mathfrak{H}_{y1}=\frac{1}{c}\beta^2\left\{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}+\frac{v}{c}(\mathfrak{E}_z^2+\mathfrak{H}_{y2}^2)\right\},$$

und auf der anderen Seite

$$\mathfrak{g}_{x2}=-\frac{1}{c}\mathfrak{E}_{z2}\mathfrak{H}_{y2}=-\frac{1}{c}\beta^2\left\{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}-\frac{v}{c}(\overline{\mathfrak{E}_z^2}+\overline{\mathfrak{H}_{y2}^2})\right\}.$$

Die Abnahme pro Zeiteinheit der elektromagnetischen Bewegungsgröße innerhalb des festen Parallelepipedons ist hiermit

$$v(\mathfrak{g}_{x2}-\mathfrak{g}_{x1})=-2\beta^2\frac{v}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}.$$

Die fiktiven Spannungen und die Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße geben also zusammen eine nach der x-Achse gerichtete ponderomotorische Kraft

$$4\beta^2\frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}-2\beta^2\frac{v}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}=2\frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}$$

pro Flächeneinheit der Scheibe, und wenn keine anderen Kräfte auf die Scheibe wirken, würde sie sich nicht gleichförmig bewegen. Denn auch nach der Mechanik von Minkowski verschwindet die Beschleunigung nur, wenn die ponderomotorische Kraft verschwindet (Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit vorausgesetzt). Eine Beschleunigung läßt sich aber nicht durch Transformation auf ein anderes Raum—Zeit-Bezugssystem zum Verschwinden bringen, und da, vom überstrichenen System aus beurteilt, die Scheibe im Gleichgewicht ruht, so liegt ein Widerspruch mit den Gesetzen der Mechanik vor.

Dieser Widerspruch zeigt, daß die Berechnung der ponderomotorischen Kraft in einem der beiden Fälle auf unrichtige Voraussetzungen gegründet ist. In dem Falle der ruhenden Scheibe ist ja schon aus Symmetriegründen keine resultierende ponderomotorische Kraft denkbar, also liegt der Fehler bei dem Falle der Bewegung. Hiermit ist gezeigt, daß für bewegte Körper die Berechnung der ponderomotorischen Kraft in angegebener Weise aus den fiktiven Spannungen und der elektromagnetischen Bewegungsgröße nicht gestattet ist.

Der Abrahamsche Ausdruck für die ponderomotorische Kraft leitet sich gerade in der angeführten Weise aus den Spannungen und der Bewegungsgröße ab. Was bewegte Körper betrifft, ist also seine Unvereinbarkeit mit der Mechanik Minkowskis bewiesen.

Um in dem betrachteten Falle der bewegten Scheibe als Resultierende Null zu erhalten, hat man sich zu der Kraft, die sich in gewöhnlicher Weise aus Spannungen und elektromagnetischer Bewegungsgröße berechnet, eine durch die Bewegung bedingte Zusatzkraft hinzugefügt zu denken. Diese Zusatzkraft muß der früher berechneten Resultierenden entgegengesetzt gleich sein, also pro Flächeneinheit berechnet die x-Komponente

$$-2\frac{v}{c}\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}$$

besitzen (y- und z-Komponente = 0). Wie groß ist diese Kraft pro Volumeneinheit berechnet? Die Dicke der Scheibe war vom überstrichenen Bezugssysteme aus beurteilt $2a$. Vom unüberstrichenen System aus betrachtet ist sie $\frac{1}{\beta}2a$, denn die Längendimensionen in der Bewegungsrichtung sind ja im Verhältnis $\frac{1}{\beta}$ verkürzt [1]). Pro Volumeneinheit hat man also die Zusatzkraft

$$-\beta\frac{v}{ca}\overline{\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_{y2}}.$$

Vom überstrichenen Bezugssystem aus betrachtet war weiter die Stromdichte $\frac{c}{a}\overline{\mathfrak{H}_{y2}}$, vom unüberstrichenen System aus beurteilt ist sie nach (5e) ebenso groß, also

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 903, 1905; H. Minkowski, Raum und Zeit (Leipzig u. Berlin, 1909), S. 6.

$$\frac{c}{a}\overline{\mathfrak{H}_{y2}} = \mathfrak{I}_z .$$

Da weiter

$$\mathfrak{E}_z = \beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right)$$

(der Ausdruck in Klammern ist unabhängig von x), so hat man für die Zusatzkraft pro Volumeneinheit den Ausdruck

$$-\beta^2 \frac{v}{c^2}\mathfrak{I}_z\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathfrak{v}_x}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\mathfrak{I}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right).$$

Dieser Ausdruck gilt für die bewegte Scheibe auch, wenn für dieselbe ε und μ von Eins verschieden sind. Wenn aber in einem elektromagnetischen Felde nur solche Medien vorkommen, für welche $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, so gilt allgemein für die Zusatzkraft der Ausdruck

$$\mathfrak{K}^z = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathfrak{v}}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\cdot\mathfrak{I}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right). \qquad (8)$$

Um dies einzusehen, ist zunächst zu beachten, welchen Bedingungen der Ausdruck für die ponderomotorische Kraft genügen muß, um mit der Mechanik Minkowskis vereinbar zu sein.

Die ponderomotorische Kraft wird ja definiert durch die Bewegung, die sie einer frei beweglichen Masse gibt. Wenn die x-Achse in die augenblickliche Bewegungsrichtung gelegt wird, lauten die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes nach der Mechanik Minkowskis [1])

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{K}_x &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}^3}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}^3}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt},\\
\mathfrak{K}_y &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\frac{d\mathfrak{v}_y}{dt},\\
\mathfrak{K}_z &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\frac{d\mathfrak{v}_z}{dt},
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

wobei $\mathfrak{K}$ die ponderomotorische Kraft ist, m die (unveränderliche) Masse des materiellen Punktes, und weiter

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \mathfrak{v}_x, \quad \frac{dy}{dt} = \mathfrak{v}_y = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \mathfrak{v}_z = 0,\\
&\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial t} + \mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x},\\
&\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}_y}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial t} + \mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial x},\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} \qquad (9a)$$

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 107 u. 108. Vgl. auch A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 917 u. f., 1905; der Einsteinsche Kraftbegriff weicht doch von dem Minkowskischen ab.

Die Gleichungen (9) definieren die ponderomotorische Kraft durch die Bewegung, die sie hervorruft. Die Arbeitsleistung pro Zeiteinheit wird durch skalare Multiplikation von Kraft $\mathfrak{K}$ und Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ erhalten [1]).

Aus den Gleichungen (9) kann man ableiten, wie sich der Ausdruck für die ponderomotorische Kraft, beim Übergehen von einem Bezugssysteme zum anderen, transformieren muß. In der Elektrodynamik betrachtet man ja die ponderomotorische Kraft pro Volumeneinheit, diese Kraft soll im folgenden mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden.

Von einem Bezugssysteme $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ aus beurteilt, sei am betrachteten Ort zur betrachteten Zeit die Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}$ gleich Null. Auf ein Volumenelement $d\bar{\omega}$ wirkt die ponderomotorische Kraft $\bar{\mathfrak{K}}\,d\bar{\omega}$, und wenn die Masse, die das Volumenelement einschließt, mit dm bezeichnet wird, so geben die Gleichungen (9)

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{K}}_x\,d\bar{\omega} &= dm\frac{\partial\bar{\mathfrak{v}}_x}{\partial\bar{t}},\\
\bar{\mathfrak{K}}_y\,d\bar{\omega} &= dm\frac{\partial\bar{\mathfrak{v}}_y}{\partial\bar{t}},\\
\bar{\mathfrak{K}}_z\,d\bar{\omega} &= dm\frac{\partial\bar{\mathfrak{v}}_z}{\partial\bar{t}}.
\end{aligned}\right.$$

Beim Übergehen zu einem Bezugssystem (x, y, z, t), das durch die Gleichungen (1) mit dem überstrichenen System verknüpft ist, hat man

$$d\bar{\omega} = \beta\,d\omega \qquad (10)$$

zu setzen, denn in diesem Maße werden die Längendimensionen in der Bewegungsrichtung verändert erscheinen. Aus (2) und (5f) ergibt sich so

$$\bar{\mathfrak{K}}_x d\bar{\omega} = \bar{\mathfrak{K}}_x\beta\,d\omega = dm\beta\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_x - v}{1-\frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}} + v\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{v}_x - v}{1-\frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}}\right\}$$

$$= dm\frac{1}{\beta\left(1-\frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}\right)^2}\left\{\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial t} + v\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}\right\}.$$

Da $\mathfrak{v}_x = v$, $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0$, so hat man

$$\frac{1}{\beta} = \sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}_x v}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}},$$

und es ergibt sich

$$\bar{\mathfrak{K}}_x\beta\,d\omega = \frac{dm}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}^3}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \mathfrak{K}_x\,d\omega .$$

In ähnlicher Weise sind die übrigen Kraftkomponenten zu behandeln, man erhält so die Beziehungen

$$\bar{\mathfrak{K}}_x = \frac{1}{\beta}\mathfrak{K}_x, \quad \bar{\mathfrak{K}}_y = \mathfrak{K}_y, \quad \bar{\mathfrak{K}}_z = \mathfrak{K}_z. \qquad (11)$$

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 108.

Diese Gleichungen gelten bei Transformation der ponderomotorischen Kraft pro Volumeneinheit aus dem Falle verschwindender Geschwindigkeit auf den Fall von Null verschiedener, nach der x-Achse gerichteter Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_x = v$. Wenn ein Ausdruck für die ponderomotorische Kraft mit der Mechanik Minkowskis vereinbar sein soll, muß er sich in dieser Weise transformieren; das ist die gesuchte, notwendige Bedingung.

Es soll nun die im elektromagnetischen Felde wirkende ponderomotorische Kraft betrachtet werden, unter Voraussetzung, daß für die vorkommende Materie $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ist. Wenn in diesem Falle noch die Geschwindigkeit Null ist, geben die Ausdrücke von Minkowski[1]), Abraham[2]) und Einstein und Laub[3]) alle dieselbe ponderomotorische Kraft; von einem Bezugssysteme $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ aus beurteilt, wenn also $\bar{\mathfrak{v}} = 0$, ist sie

$$\bar{\mathfrak{K}} = \bar{\mathfrak{E}}\bar{\varrho} + \frac{1}{c}[\bar{\mathfrak{J}}\bar{\mathfrak{B}}].$$

Wenn man ein neues Bezugssystem (x, y, z, t) einführt, das durch die Gleichungen (1) mit $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ verbunden ist, so hat man $\mathfrak{v}_x = v$, $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0$, und man erhält nach (5) für $\bar{\mathfrak{K}}_x$

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{K}}_x &= \bar{\mathfrak{E}}_x\bar{\varrho} + \frac{1}{c}(\bar{\mathfrak{J}}_y\bar{\mathfrak{B}}_z - \bar{\mathfrak{J}}_z\bar{\mathfrak{B}}_y)\\ &= \mathfrak{E}_x\left(\frac{1}{\beta}\varrho - \beta\frac{v}{c^2}\mathfrak{J}_x\right) + \frac{1}{c}\left\{\mathfrak{J}_y\cdot\beta\left(\mathfrak{B}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y\right)\right.\\ &\qquad \left. - \mathfrak{J}_z\cdot\beta\left(\mathfrak{B}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z\right)\right\}\\ &= \frac{1}{\beta}\mathfrak{E}_x\varrho + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathfrak{J}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{J}_z\mathfrak{B}_y)\\ &\qquad - \beta\frac{v}{c^2}\left\{\mathfrak{J}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{J}_y\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right)\right.\\ &\qquad \left. + \mathfrak{J}_z\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\bar{\mathfrak{K}}_x = \frac{1}{\beta}\left\{\mathfrak{E}_x\varrho + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]_x - \frac{1}{c^2}\frac{\mathfrak{v}_x}{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\mathfrak{J}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)\right\}.$$

Für $\bar{\mathfrak{K}}_y$ erhält man in derselben Weise

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{K}}_y &= \beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right)\left(\frac{1}{\beta}\varrho - \beta\frac{v}{c^2}\mathfrak{J}_x\right)\\ &\qquad + \frac{1}{c}\left\{\mathfrak{J}_z\mathfrak{B}_x - \beta\mathfrak{J}_x\cdot\beta\left(\mathfrak{B}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y\right)\right\}\\ &= \left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right)\varrho + \frac{1}{c}\left\{\mathfrak{J}_z\mathfrak{B}_x - \beta^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{J}_x\mathfrak{B}_z\right\}\end{aligned}$$

$$\bar{\mathfrak{K}}_y = \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)_y\varrho + \frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}]_y.$$

Diese Ausdrücke für die Komponenten von $\bar{\mathfrak{K}}$, mit den Gleichungen (11) verglichen, zeigen, daß man für die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ zu setzen hat

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{K} = \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)\varrho + \frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}]\\ - \frac{1}{c^2}\frac{\mathfrak{v}}{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\cdot\mathfrak{J}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right),\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

damit sich dieser Ausdruck so transformiere, wie die Mechanik Minkowskis es fordert. Der gefundene Ausdruck für $\mathfrak{K}$ gilt, wenn $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Für diesen Fall geht auch der Ausdruck, den Minkowski für die ponderomotorische Kraft angibt, in den obigen über. Der Ausdruck Abrahams, der sich, wie gesagt, aus fiktiven Spannungen und elektromagnetischer Bewegungsgröße ableitet, wird sich für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ von (12) dadurch unterscheiden, daß er das letzte Glied nicht enthält. Dieses letzte Glied ist also in der Tat die in dem früheren Beispiele auftretende Zusatzkraft $\mathfrak{K}^z$.

Der Ausdruck Minkowskis für die ponderomotorische Kraft genügt allen Forderungen seiner Mechanik. Es scheint mir aber problematisch, ob man, mit Anwendung desselben, den Energiesatz für den allgemeinen Fall in befriedigender Weise formulieren kann[1]). Es ist sehr zu bedauern, daß eine nähere Behandlung des Energiesatzes in der Elektrodynamik von Minkowskis Seite nicht vorliegt.

Die Frage nach der ponderomotorischen Kraft in der Elektrodynamik Minkowskis muß also als noch nicht endgültig beantwortet angesehen werden.

Der früher behandelte Fall der bewegten Scheibe läßt noch einen wichtigen Schluß ziehen, nämlich was die Joulesche Wärme betrifft.

Wir betrachten die Vorgänge vom Bezugssystem (x, y, z, t) aus. Im leeren Raum hat man bekanntlich für den Energiestrom $\mathfrak{S}$ den Ausdruck[2])

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

sie ist in unserem Falle der x-Achse parallel, und hat auf der einen Seite der Scheibe den Wert

---

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 97.
2) M. Abraham, l. c., Gl. (60).
3) A. Einstein u. J. Laub, Ann. d. Phys. **26**, 541, 1908.

1) Vgl. G. Nordström, Die Energiegleichung für das elektromagn. Feld bewegter Körper (Dissertation, Helsingfors 1908), S. 139 u. 140. Wie das letzte Glied in Gl. (274a) zu deuten wäre, ist nicht zu sehen.
2) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wiss. V 14, S. 159.

$$\mathfrak{S}_{x1} = -c\,\mathfrak{E}_{z1}\mathfrak{H}_{y1} = c\beta^2\left\{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}} + \frac{v}{c}\left(\overline{\mathfrak{E}_z^2}+\overline{\mathfrak{H}_{y2}^2}\right)\right\};$$

auf der anderen Seite ist

$$\mathfrak{S}_{x2} = -c\,\mathfrak{E}_{z2}\mathfrak{H}_{y2} = -c\beta^2\left\{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}} - \frac{v}{c}\left(\overline{\mathfrak{E}_z^2}+\overline{\mathfrak{H}_{y2}^2}\right)\right\}.$$

Durch die Seitenflächen des früher erwähnten festen Parallelepipedons strömt also pro Zeiteinheit eine Energiemenge

$$\mathfrak{S}_{x1} - \mathfrak{S}_{x2} = 2c\beta^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}}$$

hinein. Ein Teil hiervon erhöht den Energieinhalt im Parallelepipedon, der zweite Teil wird als Joulesche Wärme verbraucht. Die Energiedichte[1]) ist im leeren Raum auf der durch den Index 1 gekennzeichneten Seite der Scheibe

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{z1}^2+\mathfrak{H}_{y1}^2),$$

und auf der anderen Seite

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{z2}^2+\mathfrak{H}_{y2}^2).$$

Durch die Bewegung der Scheibe verändert sich der Energieinhalt des Parallelepipedons pro Zeiteinheit um

$$v\left\{\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{z1}^2+\mathfrak{H}_{y1}^2)-\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_{z2}^2+\mathfrak{H}_{y2}^2)\right\} = 4\beta^2\frac{v^2}{c}\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}}.$$

Da, wie gezeigt, die Bewegung der Scheibe kräftefrei sein muß, und also keine Arbeitsleistung vorkommt, so gibt die Vermehrung des Energieinhaltes, von der einströmenden Energie abgezogen, die im Parallelepipedon entwickelte Joulesche Wärme an. Diese ist also pro Zeiteinheit

$$2c\beta^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}} - 4\beta^2\frac{v^2}{c}\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}} = 2c\,\overline{\mathfrak{E}_z}\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}}.$$

Die Dicke der Scheibe ist (vom unüberstrichenen System aus betrachtet) gleich $\frac{1}{\beta}2a$. Das Volumen ω desjenigen Teiles der Scheibe, der innerhalb des Parallelepipedons fällt, ist also auch

$$\omega = \frac{1}{\beta}2a.$$

Weiter hat man (vgl. S. 685)

$$2c\,\overline{\mathfrak{H}_{y2}} = \beta\omega\,\mathfrak{J}_x,$$
$$\overline{\mathfrak{E}_z} = \beta\left(\mathfrak{E}_z+\frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right);$$

also kann man den Ausdruck für die innerhalb des Parallelepipedons pro Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme in der Form

$$\beta^2\omega\,\mathfrak{J}_z\left(\mathfrak{E}_z+\frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right)$$

schreiben. Auf die Volumeneinheit kommt also die Wärme

$$\beta^2\mathfrak{J}_z\left(\mathfrak{E}_z+\frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right),$$

was einem allgemeinen Ausdruck

$$Q = \frac{1}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\mathfrak{J}\left(\mathfrak{E}+\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right) \qquad (13)$$

für die Joulesche Wärme Q pro Volumen- und Zeiteinheit entspricht.

In der Tat erhält man in dem Falle, daß der Ausdruck (12) für die ponderomotorische Kraft gültig ist, also wenn $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, den Energiesatz in der Form

$$-\operatorname{div} c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\mathfrak{E}\mathfrak{D}+\frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathfrak{B}\right\} = \mathfrak{v}\mathfrak{K} + \frac{1}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\mathfrak{J}\left(\mathfrak{E}+\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)$$

(vgl. G. Nordström, l. c., Gl. (274a), S. 140), und hier drückt das letzte Glied gerade die Joulesche Wärme aus.

In bezug auf die Bedeutung des Ausdrucks (13) ist eine von Einstein gemachte Behauptung zu erwähnen. Nach Einstein[1]) vergrößert sich die Masse eines Körpers um $\frac{1}{c^2}W$, wenn ihm die Wärmemenge W zugeführt wird; dadurch wird die kinetische Energie um $W\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}-1\right)$ vergrößert. Hiernach würde Q in Gl. (13) die gesamte Energieerhöhung, also die Summe von Wärmezufuhr und hierdurch bedingte Vergrößerung der kinetischen Energie angeben. Die Wärmezufuhr allein würde

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\mathfrak{J}\left(\mathfrak{E}+\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)$$

betragen.

1) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wiss. V 14, S. 159.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 18, 639, 1905.

(Eingegangen 28. August 1909.)

Versuch einer Erweiterung des Gesetzes der korrespondierenden Zustände.

Von Hans Happel.

Bekanntlich ist nach der Clausius-Mosottischen Theorie

$$\frac{b}{4v} = \frac{K-1}{K+2}, \qquad (1)$$