ausgeprägt ist, der Absorptionsstreifen muß daher bei höheren Temperaturen verwaschener erscheinen. Weiter zeigen die Messungen (Fig. 2), daß im Teile „$a\,b$“ die Kurve der Koeffizienten einen kleineren Wert hat als für den Teil „$b\,c$“. Es ist leicht einzusehen, daß solcher Gang der Veränderung der Größe des Koeffizienten bestehen muß, wenn der Gipfel des Dispersionsstreifens mit steigender Temperatur in Richtung längerer Wellen verschoben wird. Die kleinen Koeffizienten für Punkte 11 und 10 deuten auf eine Verschiebung in derselben Richtung auch des Teiles des Streifens, welchem diese Punkte angehören. Der ganze Streifen erscheint also für höhere Temperaturen etwas in Richtung längerer Wellen verschoben. Es soll bemerkt werden, daß eine analoge Erscheinung auch für das Lichtspektrum konstatiert worden ist[1]). Die Größenordnung dieser Verschiebung überschreitet bei Temperaturänderung von 15° nicht einige Hundertstel Millimeter bei $\frac{\Lambda}{2} = 333$ mm. Die Möglichkeit, eine so kleine Verschiebung zu bemerken, liegt offenbar darin, daß 1. der Streifen sehr schmal ist — dank den sehr steilen Hebungen und Senkungen der Kurve innerhalb des Streifens wird eine sehr kleine Verschiebung desselben von bedeutenden Änderungen der Größe des Brechungsindex begleitet — und 2. die Bestimmungen des Brechungsindex für zwei verschiedene Temperaturen, welche bei unveränderter Lage aller Teile des Systems ausgeführt werden, sich auf identisch gleiche Perioden beziehen.

Um die Gültigkeit der Clausius-Mossottischen Formeln für Petroleum prüfen zu können, wurde die Dichte und deren Abhängigkeit von der Temperatur sowie auch der Temperaturkoeffizient des Brechungsindex für den dispersionsfreien Teil des Spektrums gemessen.

Die Dichte wurde im Intervall 14° bis 26° untersucht und konnte durch die Formel dargestellt werden:

$$D_t = 0{,}84048 - 0{,}000699\,(t - 20).$$

Auf Grund dieser Formel sind durch Extrapolation die Werte der Dichte von 6° bis 30° berechnet worden. Die Größe des Brechungsindex bei 17,0 = 1,4661, der Mittelwert des Temperaturkoeffizienten (aus sechs Messungen) = −0,000500.

Die Resultate sind in Tabelle III enthalten.

Die Clausius-Mossottische Formel erweist sich also für Petroleum als nur annähernd richtig. Werden diese Resultate mit den Messungen Tangls[2]) verglichen, so geht hervor, daß die

1) J. Königsberger, Ann. d. Phys. 4, 805, 1901.
2) K. Tangl, Ann. d. Phys. 10, 748, 1903.

Tabelle III.

t^0	$n^2 = \varepsilon$	D	$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{D}$
6	2,1656	0,85026	0,3291
10	2,1597	0,84747	0,3290
14	2,1538	0,84467	0,3289
18	2,1480	0,84188	0,3287
22	2,1421	0,83908	0,3286
26	2,1363	0,83628	0,3285
30	2,1304	0,83349	0,3284

Formel für Petroleum ungefähr im selben Maße gilt wie für Toluol; Xylol gibt größere, Benzol, Schwefelkohlenstoff und Chloroform bedeutend kleinere Übereinstimmung.

Zum Schlusse benutze ich die Gelegenheit, auch an dieser Stelle Prof. Dr. A. R. Colley für Anregung zu der Untersuchung und Leitung, Prof. Dr. N. Kasterin für die Überlassung aller nötigen Hilfsmittel meinen Dank auszusprechen.

Physik. Institut der Universität Odessa.

(Eingegangen 29. März 1910.)

Zur elektromagnetischen Mechanik.

Von Gunnar Nordström.

In einem Aufsatz in dieser Zeitschrift hat M. Abraham[1]) einige Fragen aus der auf das Minkowskische Relativitätsprinzip fußenden Mechanik behandelt. Seine Betrachtungen gründet Abraham auf die folgende Bewegungsgleichung, die man ja als Definition des Kraftbegriffes auffassen kann,

$$\mathfrak{K}'\,dv = \frac{d}{dt}\,\frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}. \qquad (1')$$

Es ist $\mathfrak{K}'$ die ponderomotorische Kraft pro Volumeneinheit, dv das Volumen und m die Masse („Ruhmasse“) des betrachteten materiellen Teilchens, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit, t die Zeit und c die Lichtgeschwindigkeit. Die Masse nimmt Abraham nicht als unveränderlich an, sondern mit dem Energieinhalt der Materie wechselnd.

Man kann aber bei Veränderlichkeit der Masse auch die Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{K}'' = m\,\frac{d}{dt}\,\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} \qquad (1'')$$

1) M. Abraham, diese Zeitschr. 10, 737, 1909.

als Definition der ponderomotorischen Kraft feststellen, und nach meiner Ansicht ist diese letztere Definition die richtige. Man hat ja zu fordern, daß das skalare Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit eine Arbeitsleistung angibt, die im Einklang mit dem Satze von der Erhaltung der Energie steht, und diese Forderung scheint mir die Kraft $\mathfrak{K}'$ nicht in allen Fällen zu erfüllen.

In diesem Aufsatz will ich zunächst die Mechanik ganz allgemein behandeln, und die Resultate vergleichen, die die beiden Kraftbegriffe $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ geben. Zum Schluß will ich diese Resultate auf den von mir früher in dieser Zeitschrift[1])-behandelten speziellen Fall anwenden und zeigen, welche Umstände für die Annahme der Bewegungsgleichung (1″) sprechen.

Zuerst mögen die Gleichungen (1′) und (1″) in einer Form geschrieben werden, welche die Symmetrie der vier Koordinaten x, y, z, ict hervortreten läßt. Wir bezeichnen die Dichte der Materie mit δ, es ist dann $m = \delta\, dv$, und weil allgemein

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\, dv = \int \left\{ \operatorname{div} \varphi\, \mathfrak{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dv, \qquad (2)$$

so hat man (der Einfachheit halber $\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{v}}{c}$ gesetzt)

$$\mathfrak{K}_x'\, dv = \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\delta \mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}\, dv \right\}$$

$$= \left\{ \operatorname{div} \frac{\delta \mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}\, \mathfrak{v} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} \right\} dv,$$

$$\mathfrak{K}_x' = \frac{\partial}{\partial x}\, \delta \frac{\mathfrak{v}_x^2}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\, \delta \frac{\mathfrak{v}_x \mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\, \delta \frac{\mathfrak{v}_x \mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\, \delta \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}.$$

Wir setzen $u = ict$, bezeichnen die Komponenten des Minkowskischen Bewegungsvektors mit $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, \mathfrak{a}_z, \mathfrak{a}_u$ und die Ruhmassendichte, die ein vierdimensionaler Skalar ist, mit γ. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_x &= \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \quad \mathfrak{a}_y = \frac{\mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \\ \mathfrak{a}_z &= \frac{\mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \quad \mathfrak{a}_u = \frac{ic}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}, \\ \gamma &= \delta \sqrt{1-\mathfrak{q}^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und für $\mathfrak{K}_x'$ erhält man die erste der folgenden vier Gleichungen, aus der die drei übrigen durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehen,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x' &= \frac{\partial}{\partial x}\gamma \mathfrak{a}_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}\gamma \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_u, \\ \mathfrak{K}_y' &= \frac{\partial}{\partial x}\gamma \mathfrak{a}_y \mathfrak{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma \mathfrak{a}_y^2 + \frac{\partial}{\partial z}\gamma \mathfrak{a}_y \mathfrak{a}_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma \mathfrak{a}_y \mathfrak{a}_u, \\ \mathfrak{K}_z' &= \frac{\partial}{\partial x}\gamma \mathfrak{a}_z \mathfrak{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma \mathfrak{a}_z \mathfrak{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma \mathfrak{a}_z^2 + \frac{\partial}{\partial u}\gamma \mathfrak{a}_z \mathfrak{a}_u, \\ \mathfrak{K}_u' &= \frac{\partial}{\partial x}\gamma \mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma \mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma \mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma \mathfrak{a}_u^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Rechts treten die Komponenten $\gamma \mathfrak{a}_m \mathfrak{a}_n$ eines vierdimensionalen Tensors auf. Die letzte der Gleichungen (4′) schreibt sich, wenn man die früheren Bezeichnungen einführt

$$-ic\, \mathfrak{K}_u' = c^2 \left\{ \operatorname{div} \frac{\delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} \right\}. \qquad (5')$$

Es soll nun die Gleichung (1″) in entsprechender Weise behandelt werden. Man erhält

$$\mathfrak{K}_x''\, dv = \delta\, dv \left\{ \mathfrak{v}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}} \right\},$$

und durch Einführen der Bezeichnungen (3) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x'' &= \gamma \mathfrak{a}_x \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} + \gamma \mathfrak{a}_y \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y} + \gamma \mathfrak{a}_z \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} + \gamma \mathfrak{a}_u \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial u}, \\ \mathfrak{K}_y'' &= \gamma \mathfrak{a}_x \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} + \gamma \mathfrak{a}_y \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial y} + \gamma \mathfrak{a}_z \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z} + \gamma \mathfrak{a}_u \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial u}, \\ \mathfrak{K}_z'' &= \gamma \mathfrak{a}_x \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x} + \gamma \mathfrak{a}_y \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} + \gamma \mathfrak{a}_z \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z} + \gamma \mathfrak{a}_u \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial u}, \\ \mathfrak{K}_u'' &= \gamma \mathfrak{a}_x \frac{\partial \mathfrak{a}_u}{\partial x} + \gamma \mathfrak{a}_y \frac{\partial \mathfrak{a}_u}{\partial y} + \gamma \mathfrak{a}_z \frac{\partial \mathfrak{a}_u}{\partial z} + \gamma \mathfrak{a}_u \frac{\partial \mathfrak{a}_u}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \qquad (4'')$$

Dieses Gleichungssystem kann man nach einfacher Umformung auch in folgender Weise schreiben:

1) G. Nordström, diese Zeitschr. 10, 681, 1909.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{K}_x'' &= \frac{\partial}{\partial x}\gamma a_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_x a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_x a_z \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_x a_u - a_x\left\{\frac{\partial}{\partial x}\gamma a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_y\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_u\right\}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{K}_u'' &= \frac{\partial}{\partial x}\gamma a_u a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_u a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_u a_z \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_u^2 - a_u\left\{\frac{\partial}{\partial x}\gamma a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_y\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_z + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_u\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (4a'')$$

Die letzte Gleichung erhält, wenn man die früheren Bezeichnungen einführt, die Form

$$\left.\begin{aligned}
-ic\,\mathfrak{K}_u'' &= c^2\left\{\operatorname{div}\frac{\delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta}{\sqrt{1-q^2}}\right\} \\
&\quad - \frac{c^2}{\sqrt{1-q^2}}\left\{\operatorname{div}\delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t}\right\};
\end{aligned}\right\} \quad (5'')$$

der Ausdruck in der letzten Klammer drückt gemäß (2) die Veränderung der Masse aus, die die Materie infolge Veränderung ihres Energieinhalts erleidet. Die drei ersten der Gleichungen (4a'') geben folgende Beziehung zwischen $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'$,

$$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}' - \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}}\left\{\operatorname{div}\delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t}\right\}. \quad (6)$$

Man kann leicht zeigen, daß der vierdimensionale Vektor $\mathfrak{K}''$ zum Vektor $\mathfrak{a}$ im Minkowskischen Sinne normal[1]) ist. Man findet nämlich aus (4'')

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{K}_x''\,a_x + \mathfrak{K}_y''\,a_y + \mathfrak{K}_z''\,a_z + \mathfrak{K}_u''\,a_u \\
&= \gamma a_x \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + a_u^2) \\
&\quad + \gamma a_y \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\quad) + + ,
\end{aligned}$$

und da

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + a_u^2 = -c^2,$$

so hat man

$$\mathfrak{K}_x''\,a_x + \mathfrak{K}_y''\,a_y + \mathfrak{K}_z''\,a_z + \mathfrak{K}_u''\,a_u = 0, \quad (7'')$$

d. h. die vierdimensionalen Vektoren $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{a}$ sind zueinander normal.

Aus (7'') folgt

$$-ic\,\mathfrak{K}_u'' = \mathfrak{K}''\mathfrak{v}, \quad (8'')$$

und die Gleichung (5'') läßt sich schreiben

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{K}''\mathfrak{v} + \frac{c^2}{\sqrt{1-q^2}}\left\{\operatorname{div}\delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t}\right\} \\
&= c^2\left\{\operatorname{div}\frac{\delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta}{\sqrt{1+q^2}}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (9'')$$

Diese Gleichung drückt den Energiesatz aus; bevor wir sie näher besprechen, wollen wir einige, den eben gefundenen entsprechende Gleichungen für $\mathfrak{K}'$ aufstellen. Man hat

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_x'' &= \mathfrak{K}_x' - a_x\left\{\frac{\partial}{\partial x}\gamma a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_z\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_u\right\}, \\
\mathfrak{K}_x''\,a_x &= \mathfrak{K}_x'\,a_x - a_x^2\{\ \},
\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{K}_x'\,a_x + \mathfrak{K}_y'\,a_y + \mathfrak{K}_z'\,a_z + \mathfrak{K}_u'\,a_u \\
&\quad + c^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\gamma a_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma a_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma a_z\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u}\gamma a_u\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (7')$$

Die Beziehung zwischen den vierdimensionalen Vektoren $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'$ läßt sich also durch das folgende Gleichungssystem ausdrücken,

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{K}_x'' &= \mathfrak{K}_x' + \frac{a_x}{c^2}(\mathfrak{K}_x'\,a_x + \mathfrak{K}_y'\,a_y + \mathfrak{K}_z'\,a_z \\
&\quad + \mathfrak{K}_u'\,a_u), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{K}_u'' &= \mathfrak{K}_u' + \frac{a_u}{c^2}(\mathfrak{K}_x'\,a_x + \mathfrak{K}_y'\,a_y + \mathfrak{K}_z'\,a_z \\
&\quad + \mathfrak{K}_u'\,a_u),
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

und diese Beziehung ist genau dieselbe wie die, welche nach Minkowski zwischen der ponderomotorischen Kraft und dem Vektor, den er mit K bezeichnet, besteht[1]).

Aus (7') ergibt sich für $-ic\,\mathfrak{K}_u'$

$$-ic\,\mathfrak{K}_u' = \mathfrak{K}'\mathfrak{v} + c^2\sqrt{1-q^2}\left\{\operatorname{div}\delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t}\right\}, \quad (8')$$

und durch einen Vergleich mit (5') erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{K}'\mathfrak{v} + c^2\sqrt{1-q^2}\left\{\operatorname{div}\delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t}\right\} \\
&= c^2\left\{\operatorname{div}\frac{\delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta}{\sqrt{1-q^2}}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

Es sind nun über die Gleichungen (9'') und (9') einige Worte zu sagen. Die Gleichungen sollen, wie gesagt, den Energiesatz ausdrücken. Wenn man ein bestimmtes materielles Teilchen betrachtet und die Gleichungen mit dem Volumen dv des Teilchens multipliziert, so bedeutet

$$\begin{aligned}
&dv\,c^2\left\{\operatorname{div}\frac{\delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta}{\sqrt{1-q^2}}\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{c^2\delta}{\sqrt{1-q^2}}\,dv\right\}
\end{aligned}$$

die zeitliche Veränderung der Größe

$$\frac{c^2\delta}{\sqrt{1-q^2}}\,dv,$$

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 83.

1) H. Minkowski, l. c. S. 98, Ausdr. (98).

welche die mechanische Energie des Teilchens ausdrückt. Der Anteil

$$c^2 \delta \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} - 1 \right\} dv$$

ist bekanntlich die kinetische Energie; der übrige Teil

$$c^2 \delta \, dv$$

ist unabhängig von der Bewegung und könnte vielleicht materielle Energie genannt werden.

Es ist weiter

$$dv \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\} = \frac{d}{dt} (\delta \, dv)$$

die zeitliche Veränderung der Masse des Teilchens, die durch Veränderung seines Inhalts an materieller Energie stattfindet. Hierzu ist eine Energiezufuhr nichtmechanischer Natur (z. B. Wärmezufuhr) erforderlich, und es drückt das Glied

$$c^2 \sqrt{1-q^2} \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-q^2}} \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\}$$

in Gleichung (9′) bzw. (9″) diese Energiezufuhr (pro Volumen- und Zeiteinheit) aus.

Wenn man nicht ein bestimmtes materielles Teilchen betrachtet, sondern einen festen Ort ins Auge faßt, so hat man $\frac{\partial}{\partial t} \frac{c^2 \delta}{\sqrt{1-q^2}}$ als zeitliche Veränderung der mechanischen Energiedichte

$$\frac{c^2 \delta}{\sqrt{1-q^2}} = \psi^m \qquad (11)$$

aufzufassen, und

$$\frac{c^2 \delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}} = \mathfrak{S}^m \qquad (12)$$

als den mechanische Energiestrom, dessen Divergenz in der Energiegleichung auftritt. Dieser Energiestrom ist gleich der mit c^2 multiplizierten mechanischen Impulsdichte.

Die Gleichungen (9′) und (9″) kann man in das folgende Gleichungssystem vereinigen

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{S}^m + \frac{\partial \psi^m}{\partial t} \\ &= \mathfrak{K}' \mathfrak{v} + c^2 \sqrt{1-q^2} \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\} \\ &= \mathfrak{K}'' \mathfrak{v} + \frac{c^2}{\sqrt{1-q^2}} \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Nun wollen wir uns zu der ponderomotorischen Kraft elektromagnetischen Ursprungs wenden. Auch andere ponderomotorische Kräfte können gleichzeitig auf die Materie wirken, die gesamte ponderomotorische Kraft, die die Bewegung hervorruft, ist also die Summe der elektromagnetischen und der nichtelektromagnetischen ponderomotorischen Kraft. Wir setzen

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}^{e'} + \mathfrak{K}^{n'}, \qquad (14')$$

$$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}^{e''} + \mathfrak{K}^{n''}; \qquad (14'')$$

der Index e soll die elektromagnetische ponderomotorische Kraft kennzeichnen, der Index n die nichtelektromagnetische.

Nach (7′) hat man

$$\mathfrak{K}_x' a_x + \mathfrak{K}_y' a_y + \mathfrak{K}_z' a_z + \mathfrak{K}_u' a_u = - c^2 \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\}.$$

Die Summe $\mathfrak{K}'_x a_x + \ldots$ ist also proportional mit der Massenveränderung

$$\operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Wir wollen annehmen, daß die einzige vorliegende Ursache zu dieser Massenveränderung die Entwicklung Joulescher Wärme ist. Wenn wir dann in der obigen Gleichung den elektromagnetischen und den nichtelektromagnetischen Anteil der ponderomotorischen Kraft voneinander trennen, so haben wir zu setzen

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{K}_x^{e'} a_x + \mathfrak{K}_y^{e'} a_y + \mathfrak{K}_z^{e'} a_z + \mathfrak{K}_u^{e'} a_u \\ &\quad = - c^2 \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\}, \\ &\mathfrak{K}_x^{n'} a_x + \mathfrak{K}_y^{n'} a_y + \mathfrak{K}_z^{n'} a_z + \mathfrak{K}_u^{n'} a_u = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

denn die Massenveränderung kann bei der gemachten Annahme nur zu dem elektromagnetischen Kraftanteil in Beziehung stehen. Für $-ic\mathfrak{K}_u^{e'}$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &- ic \mathfrak{K}_u^{e'} \\ &= \mathfrak{K}^{e'} \mathfrak{v} + c^2 \sqrt{1-q^2} \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Da die Beziehung (10) zwischen $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'$ auch für ihre Teilkräfte gelten muß, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}^{e''} &= \mathfrak{K}^{e'} - \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-q^2}} \left\{ \operatorname{div} \delta \mathfrak{v} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \right\}, \\ \mathfrak{K}^{n''} &= \mathfrak{K}^{n'} = \mathfrak{K}^{n}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Wie aus den im Anfang zitierten Aufsätzen von Abraham und mir hervorgeht, entsprechen den beiden Kraftbegriffen auch zwei verschiedene Ausdrücke für die Joulesche Wärme. Wenn man diese Wärme (pro Volumen- und Zeiteinheit gerechnet) mit Q' bzw. Q'' bezeichnet, so hat man

$$(1-q^2) Q'' = Q' = \{ \mathfrak{E} + [\mathfrak{q} \mathfrak{B}] \} \mathfrak{J}, \qquad (18)$$

wo $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft, $\mathfrak{B}$ die magnetische Erregung und $\mathfrak{J}$ der Leitungsstrom ist. Weiter ist nach der Abrahamschen Theorie

$$- ic \mathfrak{K}_u^{e'} = \mathfrak{K}^{e'} \mathfrak{v} + Q', \qquad (19)$$

woraus nach (16) und (18) für die Massenveränderung sich ergibt

$$\operatorname{div}\delta\mathfrak{v}+\frac{\partial\delta}{\partial t}=\frac{1}{c^2\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}\{\mathfrak{E}+[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\}\mathfrak{J}. \quad (20)$$

Die Energiegleichung für die elektromagnetischen Vorgänge läßt sich schreiben[1]):

$$-\operatorname{div}\mathfrak{S}^e-\frac{\partial\psi^e}{\partial t}=\mathfrak{K}^{e'}\mathfrak{v}+Q'=\mathfrak{K}^{e''}\mathfrak{v}+Q'', \quad (21)$$

wo $\mathfrak{S}^e$ der elektromagnetische Energiestrom und ψ^e die elektromagnetische Energiedichte ist. Durch Vereinigung der elektromagnetischen Energiegleichung mit der mechanischen (13) erhält man folgende Gleichung

$$\operatorname{div}(\mathfrak{S}^e+\mathfrak{S}^m)+\frac{\partial}{\partial t}(\psi^e+\psi^m)=\mathfrak{K}^u\mathfrak{v}. \quad (22)$$

Diese Gleichung enthält die Arbeit der ponderomotorischen Kraft des elektromagnetischen Feldes nicht mehr, und gilt, weil $\mathfrak{K}^{u'}=\mathfrak{K}^{u''}$, für jeden der beiden Kraftbegriffe. Wie die Gleichung als Energiegleichung zu deuten ist, geht ja unmittelbar hervor.

Die Kraft $\mathfrak{K}^u$ ist ja zu ihrer Natur unbestimmt. Die Arbeit derselben läßt sich nach meiner Ansicht nur wegen ungenügender Kenntnis der dieser Kraft zugrunde liegenden Naturgesetze nicht aus der Energiegleichung wegschaffen. Denn man darf wohl annehmen, daß alle Energie, sich kontinuierlich fortpflanzt und daß also, wenn sämtliche vorliegende Erscheinungen berücksichtigt sind, die Energiegleichung sich in die Form

$$\operatorname{div}\mathfrak{S}'+\frac{\partial\psi'}{\partial t}=0$$

schreiben läßt, wo $\mathfrak{S}'$ der totale Energiestrom und ψ' die totale Energiedichte ist. Wenn man aber den Kraftbegriff $\mathfrak{K}'$ annimmt, so scheint es mir Fälle zu geben, wo man den Energiesatz nicht durch eine solche Gleichung ausdrücken kann; ja nach meiner Meinung erhält man sogar Widersprüche mit dem Satze von der Erhaltung der Energie, und aus diesen Gründen kann ich den Kraftbegriff $\mathfrak{K}'$ nicht billigen. Diese Umstände treten sehr deutlich bei dem von mir früher in dieser Zeitschrift behandelten Beispiel[2]) hervor, und es mag deswegen die angeführte Theorie auf diesen speziellen Fall angewandt werden.

Es bewegt sich im leeren Raume eine unendlich große Scheibe gleichförmig und senkrecht zu ihrer Ebene, welche Scheibe von einem konstanten geradlinigen Leitungsstrom von der Dichte $\mathfrak{J}$ durchflossen ist (also $\mathfrak{J}$ senkrecht zu $\mathfrak{v}$). Dieselbe Richtung wie $\mathfrak{J}$ hat der ebenfalls konstante Vektor $\mathfrak{E}+[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]$. Von dem die Scheibe umgebenden elektromagnetischen Felde wird jeder Abschnitt der Scheibe von der Basis einer Flächeneinheit die Energie

$$\frac{d}{1-\mathfrak{q}^2}\{\mathfrak{E}+[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\}\mathfrak{J}$$

pro Zeiteinheit erhalten (d die Dicke der Scheibe). Pro Volumen- und Zeiteinheit kommt also die Energie

$$Q''=\frac{1}{1-\mathfrak{q}^2}\{\mathfrak{E}+[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\}\mathfrak{J}.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig davon, ob man den Kraftbegriff $\mathfrak{K}'$ oder $\mathfrak{K}''$ benutzt. Das Schicksal aber, das diese Energie erleidet, ist in den beiden Fällen verschieden.

Wenn man sich, wie ich in dem zitierten Aufsatze, auf den Kraftbegriff $\mathfrak{K}''$ stützt, ist die Bewegung der Scheibe als kräftefrei anzusehen, und die Energie Q'' wird vollständig zur Erhöhung der Energie der Scheibe verbraucht. Die Energie Q'' ist entweder als Joulesche Wärme aufzufassen[1]), oder, da sich die Masse durch Wärmezufuhr gemäß (20) verändert, als Veränderung der mechanischen Energie $\frac{c^2\delta}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}$.

Wenn man dagegen, wie Abraham, den Kraftbegriff $\mathfrak{K}'$ benutzt, ist die auf die Scheibe wirkende Kraft nicht gleich null, und die Energie Q''

$$Q''=\mathfrak{K}'\mathfrak{v}+Q'$$

wird teils als Joulesche Wärme Q' verbraucht, teils als Arbeit der ponderomotorischen Kraft $\mathfrak{K}'$. Wohin geht aber die Energie

$$\mathfrak{K}'\mathfrak{v}=\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2(1-\mathfrak{q}^2)}\{\mathfrak{E}+[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\}\mathfrak{J} \quad ?$$

Die kinetische Energie der Scheibe kann sie nicht vergrößern, denn das würde in Betracht der auch von Abraham angenommenen Beziehung (20) dem Ausdruck

$$c^2\delta\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}-1\right)$$

für die kinetische Energie widersprechen.

Da ich auch keine andere mögliche Erklärung dafür finde, was aus der Energie $\mathfrak{K}'\mathfrak{v}$ wird, so muß ich behaupten, daß ein Widerspruch mit dem Satze von der Erhaltung der Energie vorliegt. Da weiter dieser Widerspruch bei Annahme des Kraftbegriffes $\mathfrak{K}''$ nicht auftritt, so ist die Wahl zwischen den beiden Kraftbegriffen zugunsten $\mathfrak{K}''$ entschieden. Für die Joulesche Wärme ist natürlich dann der Wert Q'' als richtig anzusehen.

Die Abrahamschen Ausdrücke[2]) für pon-

1) Indem wir die Energiegleichung so schreiben, schließen wir den Minkowskischen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes von unseren Betrachtungen aus.

2) G. Nordström, l. c.

1) Vgl. hierbei die von mir in dem zitierten Aufsatz am Schluß gemachte Bemerkung.

2) M. Abraham, l. c.; Rend. Circ. Matem. Palermo, 28, 1909.

deromotorische Kraft und Joulesche Wärme, die, wie gesagt, den Kraftbegriff $\mathfrak{K}'$ voraussetzen, kann ich aus den angeführten Gründen nicht billigen. Man kann aber dem Vektor, den Abraham als ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes bezeichnet, dieselbe Bedeutung geben wie Minkowski dem Vektor, den er mit K bezeichnet. Wenn man so tut und die ponderomotorische Kraft dann so wie Minkowski bildet[1]), so erhält man für diese Kraft einen Ausdruck, der, soweit ich sehe, alle Forderungen füllt, die man an ihn zu stellen hat, und welcher Ausdruck sich nur durch das Glied (vgl. Gl. (15) und (20))

$$-\frac{\mathfrak{v}}{c^2(1-q^2)}\{\mathfrak{E}+[q\,\mathfrak{B}]\}\mathfrak{I}$$

von dem Abrahamschen unterscheidet. Hierin liegt nach meiner Meinung die Bedeutung des Abrahamschen Ausdruckes.

1) H. Minkowski, l. c. Ausdr. (98).

Helsingfors, 4. April 1910.

(Eingegangen 10. April 1910.)

Nachtrag. Herr Prof. Dr. M. Abraham hat mir in liebenswürdiger Weise brieflich Näheres über seinen Standpunkt mitgeteilt. Nach seiner Ansicht erleidet die bewegte Scheibe außer der Wärmezufuhr Q' noch eine Energiezunahme von der Größe $\mathfrak{K}'\mathfrak{v}$. Dann ist natürlich kein Widerspruch mit dem Energiesatz vorhanden, es bleibt aber die physikalische Bedeutung der Energiezunahme $\mathfrak{K}'\mathfrak{v}$ zu erklären, die allerdings ich nicht einsehen kann.

Helsingfors, 11. Mai 1910.

Absoluter Spannungsmesser für Spannungen von 10000 bis 180000 Volt.

Von A. Tschernyscheff.

Die bis jetzt existierenden Instrumente zur Messung hoher Spannungen weisen eine Reihe von Mängeln auf, welche sie zu genauen Messungen wenig geeignet machen. Wählt man Luft unter Atmosphärendruck als Isolator zwischen den einander anziehenden Teilen, so werden die Instrumente außerordentlich schwerfällig und verhältnismäßig unempfindlich, weil man dann bei sehr hohen Spannungen den Abstand zwischen den einander anziehenden Teilen sehr groß nehmen muß. Außerdem wirkt auf ihre Anzeigen die Ausströmung der Elektrizität, indem sie Luftströmungen erzeugt; bei der geringen Intensität der Anziehung kann dieser Umstand das Resultat der Messung stark verzerren. Der Ersatz der Luftisolation durch eine isolierende Flüssigkeit hat auch keine befriedigenden Resultate gegeben, denn solche Instrumente erfordern eine beschwerliche empirische Graduierung, die sich überdies noch in Abhängigkeit von einer ganzen Reihe von Umständen verändert. Diese Mängel konnten aber vermieden werden durch Anwendung eines (auf 10 Atm.) komprimierten Gases als isolierender Substanz zwischen den einander anziehenden Teilen.

Das vorliegende Instrument ist im wesentlichen eine elektrostatische Wage, wobei die elektrostatischen Anziehungskräfte zwischen den Scheiben A und B (Fig. 1) ausbalanciert werden durch die magnetische Anziehung zwischen den Spulen S und m, welche von demselben Strom durchflossen werden. Wenn die Stromrichtung in beiden Spulen die gleiche ist, so wird die eine Spule in die andere hineingezogen mit einer Kraft proportional dem Quadrat der Stromstärke:

$$F_1 = aJ^2 \quad (a = \text{Konstante}). \qquad (1)$$

Anderseits ist die elektrostatische Anziehung der Scheiben aufeinander proportional dem Quadrate ihrer Potentialdifferenz:

$$F_2 = bV^2 \quad (b = \text{Konstante}). \qquad (2)$$

Im Gleichgewicht ist:

$$aJ^2 = bV^2,$$

d. h.

$$V = cJ, \text{ wo } c = \sqrt{\frac{a}{b}}. \qquad (3)$$

Für das vorliegende Elektrometer ist die gesuchte Potentialdifferenz gleich der Intensität des ausbalancierenden Stromes multipliziert mit einer Apparat-Konstante. Die Figuren zeigen den Bau des Instrumentes. Die Scheibe A bildet den beweglichen Teil (Diameter 60 mm), er ist umgeben vom Schutzring C (innerer Durchmesser 61 mm, äußerer 120 mm). Die unbewegliche Scheibe B (Durchmesser 120 mm), liegt gegenüber der beweglichen Scheibe A. Um die Potentialdifferenz in zwei Punkten zu messen, verbindet man A und C mit dem einen Punkt, B mit dem anderen. Damit bei der daraufhin erfolgenden Anziehung die Scheibe A nicht zu starke Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage ausführe, ist ihr Spielbereich durch Anschläge eingeschränkt auf 0,4 mm nach unten und 0,05 mm nach oben. Die Scheibe A ist aufgehängt auf dem einen Arm des Wagebalkens u, auf dessen anderem Arm die Spule m schwebt. Zur Bestimmung des Gleichgewichts wird durchs Fenster w auf den Ablesespiegel a visiert. Der Strom wird der Spule S über die Kupferblättchen o durch zwei bewegliche Kontakte zugeführt, welche in die mit Quecksilber gefüllten Ebonitnäpfe t ein-